

UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA

Année Universitaire 2019-2020

ALGEBRE LINEAIRE Série 2

Exercice 1

Soient les applications suivantes :

$$\mathbf{a-f}_1(x,y) = (x+2y, e^{x+y}) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{b-f}_2(x,y,z) = (x,y,z) + (0,1,0) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{c-f}_3(x,y,z) = (x-y, x+z, 3x+y, x, 5z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{d-f}_4(x,y) = (x+y, 0, x-y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Sont-elles linéaires ? Si oui, déterminer leur rang.

Exercice 2

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow x - y + 2z$$

- 1- Montrer que f est linéaire.
- 2- Déterminer $\ker(f)$ et puis donner une base de $\ker(f)$.
- 3- Déterminer $\text{Im}(f)$.

Exercice 3

$$\text{Soit } g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \rightarrow (x - y + 2z, 2x - z)$$

- 1- Justifier que g est linéaire.
- 2- Déterminer $\text{Im}(g)$.
- 3- Déterminer $\ker(g)$ et puis donner une base de $\ker(g)$.

Exercice 4

$$\text{Soit } h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightarrow (x - y + 2z, 2x - z, 4x + 2y - 7z)$$

- 1- Déterminer $\ker(h)$ et puis donner une base de $\ker(h)$.
- 2- Donner une famille génératrice de $\text{Im}(h)$, et donner une base de $\text{Im}(h)$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ linéaire dont le noyau a pour base $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ où la base canonique de \mathbb{R}^n est notée (e_1, e_2, \dots, e_n) .

- 1-Quelle est la dimension de $\text{Im}(f)$? Même question lorsque $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ puis $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$.
- 2-Pour ces trois applications linéaires, quelle est la dimension de $\text{Ker}(f)$ lorsque son image a pour base $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$?.

Exercice 6

Soit l'application $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(e_1) = (1, -1, 0); f(e_2) = (-1, 0, 1)$$

$$f(e_3) = (1, -1, 2); f(e_4) = (0, -2, 3)$$

1-Rappeler brièvement pourquoi ces relations caractérisent f .

2-Déterminer $\text{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective ?

3-Déterminer $\text{Im}(f)$. L'application f est-elle surjective ? bijective ?

Exercice 7

Soit l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi(e_1) = f_1 + f_2; \varphi(e_2) = -f_1 + f_2;$$

$$\varphi(e_3) = f_1 + 3f_2 + 2f_3; \varphi(e_4) = f_1 + f_2 + f_3$$

Où la base canonique de \mathbb{R}^4 est notée (e_1, e_2, e_3, e_4) et celle de \mathbb{R}^3 est notée (f_1, f_2, f_3) .

1- Déterminer une base de $\text{Im}(\varphi)$. L'application φ est-elle surjective ?

2- Déterminer la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$. L'application φ est-elle injective ?

3- Déterminer de $\text{Ker}(\varphi)$.

Exercice 8

Soient $B = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 définie par :

$$f(e_1) = e_1; f(e_2) = f(e_3) = (e_2 + e_3)/2$$

1- Déterminer $\text{Ker}(f)$, Donner une base et la dimension.

2- Déterminer de $\text{Im}(f)$

3- Montrer que les sous espaces vectorielles $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

4- Déterminer $f \circ f$.

Exercice 9

Soit E l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . A toute application $f \in E$, on associe l'application $A(f)$ définie par :

$$f \rightarrow \int_0^x f(t) dt$$

1- Justifier que A est une application de E à valeurs dans E .

2-Montrer que A est linéaire.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \rightarrow (x + y + z, y + z, 2y + z)$$

Déterminer $\text{ker}(f)$. En déduire que f est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .